

离心泵四面体网格质量衡量准则及优化算法

董亮, 刘厚林, 谈明高, 路明臻, 王勇, 王凯

(江苏大学流体机械工程技术研究中心, 212013, 江苏镇江)

摘要: 针对网格优化过程中边界网格质量难以控制的问题, 提出一种新的网格优化算法. 通过数值计算分析了不同质量衡量准则对劣质单元及其单元形状变化评判效果的等价性问题, 对各衡量准则所耗费的时间进行了对比, 在此基础上选用一种最优的衡量准则推导出了错误函数, 并将该函数作为基于优化光顺的目标函数, 目标函数中包含有考虑边界网格质量和内部网格质量的函数项, 且为函数项添加了一个权重系数, 从而实现了边界网格单元质量的控制. 经某离心泵叶轮算例验证表明: 优化后网格单元质量系数趋于 0 的劣质单元全部被消除, 网格的整体质量得到了显著提高; 随着权重系数的增加, 边界的平均网格质量有所提高.

关键词: 离心泵; 网格优化; 单元质量衡量准则; 四面体网格

中图分类号: TP391 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2011)11-0100-06

Quality Measurement Criteria and Optimization Algorithm of Tetrahedral Mesh for Centrifugal Pumps

DONG Liang, LIU Houlin, TAN Minggao, LU Mingzhen, WANG Yong, WANG Kai

(Research Center of Fluid Machinery Engineering and Technology, Jiangsu University, Zhenjiang, Jiangsu 212013, China)

Abstract: A new mesh optimization algorithm was proposed to control boundary mesh quality in the mesh optimization. Calculations were performed to analyze the ability of seven methods to distinguish four kinds of poor-quality elements and their effects on the equivalent change of element shape, and compare the time each method costs. Then an error function was derived from an optimal measurement criterion. The error function was adopted as the objective function of the optimization-based smoothing. In the objective function, the function terms considering boundary mesh quality and internal mesh quality were included, and a weighted coefficient controlling boundary mesh quality was added. The practical application of the optimization algorithm for a centrifugal pump impeller shows that the worst elements can be eliminated and the whole quality can be improved clearly. Moreover, the quality of the average mesh in the boundary rises with the increase in the weighted coefficient.

Keywords: centrifugal pump; mesh optimization; element quality measurement criteria; tetrahedral mesh

随着计算机技术及计算流体动力学(CFD)的发展, 内流场数值模拟已成为改进和优化离心泵设计的一个重要手段, 其计算结果的可信度问题一直是

众多学者研究的重点^[1-3]. 研究表明, 网格质量是引起 CFD 不确定度的重要因素, 也是控制 CFD 不确定度的关键.

收稿日期: 2011-04-02. 作者简介: 董亮(1981—), 男, 博士生; 刘厚林(联系人), 男, 教授, 博士生导师. 基金项目: 国家杰出青年基金资助项目(508255902); 国家自然科学基金资助项目(51079062); 江苏省 2010 年研究生创新计划资助项目(CA10B_263Z).

网络出版时间: 2011-08-10

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20110810.0130.004.html>

四面体网格以其简单灵活的特性和对复杂边界具有较强的适应能力,已成为离心泵数值计算中最常用的网格单元. 高质量的四面体网格可以提高数值计算的精度和效率,但目前的四面体网格生成算法不可避免地会产生很多劣质单元,严重影响了 CFD 计算的性能,甚至可能导致计算无法收敛,因此对生成的网格进行优化就显得十分必要. 网格光顺是应用较广的网格优化算法^[4-6],仅需改变节点的位置,无需改变网格的拓扑结构,便可通过移动某个节点来提高所有与其相连单元的平均质量系数和关联质量系数. Laplacian 光顺以其简单得到了广泛的关注,但它有时并不能改善网格的质量,且易产生不合法单元(单元反向或者单元体积为负),为此许多改进算法应运而生^[7-8]. 基于优化的光顺^[9-10]是采用对目标函数求最优解的方法来确定节点的新位置,从而解决了 Laplacian 光顺出现的问题. 长期以来,网格单元质量衡量准则并没有一个公认的标准,大多数的优化算法通过任意地选用一种单元质量衡量准则来推导网格优化的目标函数,它们并未考虑不同质量衡量准则对劣质单元以及单元形状变化的评判是否等价的问题. 发展优化目标函数的关键是,获得一种较优的单元质量衡量准则来建立能够控制边界网格质量且能保护边界完整性的目标函数.

1 四面体单元质量衡量准则

判断单元质量的标准是衡量数值计算模块利用单元进行求解时的精度和速度,这个衡量标准并不能直接作为单元质量评估和网格优化调整的准则. 因此,从不同角度考虑的四面体单元质量衡量准则问世,如表 1 所示,其中涉及到的物理量包括:四面体的体积 V ;四面体的边长 L_i ;三角形的面积 S_i ;四面体内接球和外接球的半径 r 、 R ;四面体最短边和最长边 $L_{\min}$ 、 $L_{\max}$;四面体三角形中最大和最小内角 $Q_{\max}$ 、 $Q_{\min}$;四面体与正四面体的夹角 Q_c ;与原四面体具有相同外接球半径且为最大的四面体的体积 $V_{\max}$;函数

$$\theta = 3 \times 6^{1/2} \arcsin \left(12V \left(\prod_{\substack{j,k \neq i \\ 1 \leq j < k \leq 4}} ((L_{ij} + L_{jk})^2 - L_{ik}^2) \right)^{-1/2} \right)$$

其中的 L_{ij} 表示顶点标号为 i 、 j 的四面体的边长. 衡量准则的值越大,说明单元质量越高. 当准则的值为 1 时,单元质量最好,为正四面体单元;当准则的值为 0 时,单元质量最差,为退化单元.

表 1 各种单元质量衡量准则

准则	表达式	取值范围	引用文献
α	$6 \times 6^{1/2} V / \left(\left(\sum_{i=1}^4 S_i \right) \max_{i=1, \dots, 6} L_i \right)$	$[0, 1]$	[11]
β	$(V_{\max} - V) / V_{\max}$	$[0, 1]$	[11]
γ	$6 \times 2^{1/2} V / \left(\frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 L_i^2 \right)^{3/2}$	$[0, 1]$	[11]
δ	$3r/R$	$[0, 1]$	[12]
ϵ	$L_{\min} / L_{\max}$	$[0, 1]$	[12]
ζ	$\min(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$	$[0, 1]$	[12]
θ	$1 - \max \left(\frac{Q_{\max} - Q_c}{180 - Q_c}, \frac{Q_c - Q_{\min}}{Q_c} \right)$	$[0, 1]$	[12]

1.1 数值方案选取

数值试验方案主要考虑两个方面,一是顶点移动的个数,二是对易导致计算发散的劣质单元的评判效果. 目前,基于优化光顺的网格优化算法在每次循环时通常只移动 1 个顶点. 为了不失一般性,本文考虑了 3 种情况,即移动的顶点数分别是 1、2、3,并在相应的情况下验证了质量衡量准则对 4 种最差劣质单元(见图 1)的评判效果.

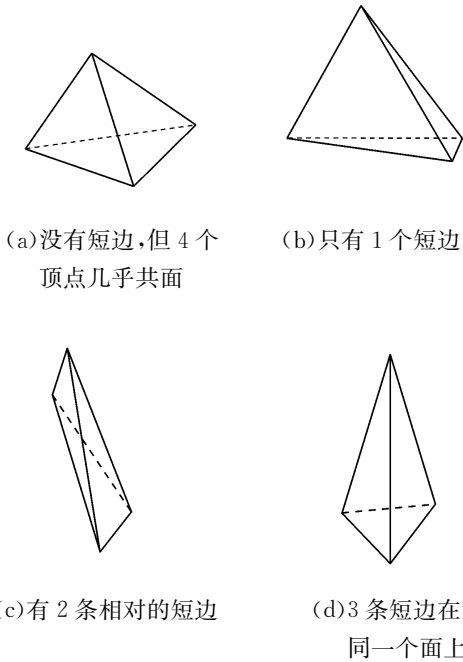


图 1 4 种类型劣质单元

数值试验方案如表 2 所示. 变量 $u(0 < u \leq 1)$ 可以控制四面体各个顶点(t_1 、 t_2 、 t_3)的位置. 当 u 发生变化时,四面体单元的质量会发生变化;当 $u=1$ 时,四面体为正四面体. 四面体各个顶点的对应标号如

图2所示.

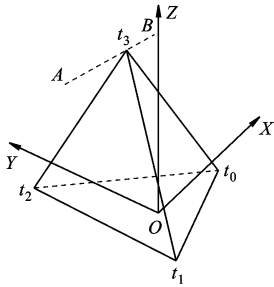


图2 四面体单元示意图

1.2 数值试验结果分析

就各数值方案而言,单元顶点位置的变化能够引起各质量衡量准则的变化,如图3~图8所示.

从图3可以看出,对于 ϵ 和 θ ($\epsilon=0.578\ 792,\theta=0.504\ 104$)衡量准则,当 $u\rightarrow0$ 时,相应的单元质量度量值较高,所以无法判断出四面体4个顶点共面的情况.在网格优化过程中可能会把图1a中的这类劣质四面体单元错认为是较好的单元,从而影响最终的优化效果.

从图7可以看出,随着顶点 t_3 与点A距离 d 的增大, $\alpha,\gamma,\epsilon,\zeta,\theta$ 是递增的,而 β,δ 是递减的.这一现象表明,衡量准则之间存在不等价性,即采用某一衡量准则,单元质量是增加的,采用另一种衡量准则,单元质量是下降的.因此,采用不同的准则对同一网格进行优化,有可能会得到相反的优化方向,从而影响最终的优化结果.

表2 数值试验方案

方案	四面体各点坐标	移动点数	方案说明
1	$t_0(0,0,0);t_1(1,0,0);t_2(0.5,3^{1/2}/2,0);t_3(0.5,3^{1/2}/6,6^{1/2}u/3)$	1	顶点 t_3 移动且当 $u\rightarrow0$ 时,四面体的4个点接近共面(见图1a).
2	$t_0(0,0,0);t_1(1,0,0);t_2(0.5,3^{1/2}u/2,0);t_3(0.5u,3^{1/2}u/6,6^{1/2}u/3)$	2	顶点 t_2,t_3 移动且当 $u\rightarrow0$ 时,只有1条短边,组成四面体的4个三角形中至少有1个质量较差的三角形(见图1b).
3	$t_0(0,0,0);t_1(1,0,0);t_2(1-0.5u,3^{1/2}u/2,0);t_3(0.5u,3^{1/2}u/6,6^{1/2}u/3)$	2	顶点 t_2,t_3 移动且当 $u\rightarrow0$ 时,有2条相对的短边,组成四面体的4个三角形中至少有2个质量较差的三角形(见图1c).
4	$t_0(0,0,0);t_1(u,0,0);t_2(0.5u,3^{1/2}u/2,0);t_3(0.5,-3^{1/2}/2+3^{1/2}2u/3,6^{1/2}u/3)$	3	顶点 t_1,t_2,t_3 移动且当 $u\rightarrow0$ 时,有3条短边且在同一平面内,组成四面体的4个三角形中有3个质量较差的三角形(见图1d).
5	$t_0(0,0,0);t_1(3,0,0);t_2(5,3,0);A(0.6,1.2,1.0);B(1.2,2.4,1.0)$ $t_0(3^{1/2}/3,0,0);t_1(-3^{1/2}/6,0.5,0);t_2(-3^{1/2}/6,-0.5,0);t_3(0.5\cos(2\pi u),0.5\sin(2\pi u),6^{1/2}/3)$	1	顶点 t_3 沿AB方向移动(见图2).
6	$t_0(3^{1/2}/3,0,0);t_1(-3^{1/2}/6,0.5,0);t_2(-3^{1/2}/6,-0.5,0);t_3(0.5\cos(2\pi u),0.5\sin(2\pi u),6^{1/2}/3)$	1	顶点 t_3 在 $z=6^{1/2}/3$ 平面上绕Z轴进行圆周移动.

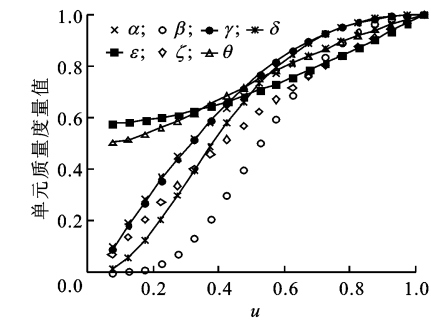


图3 方案1中单元质量度量值随u的变化情况

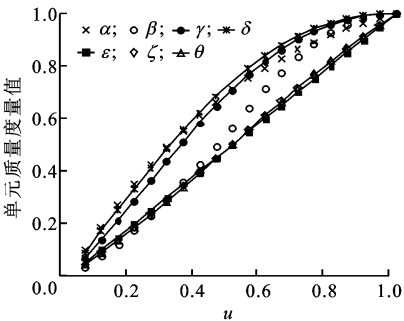


图4 方案2中单元质量度量值随u的变化情况

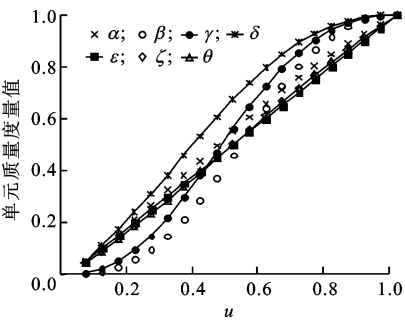


图5 方案3中单元质量度量值随u的变化情况

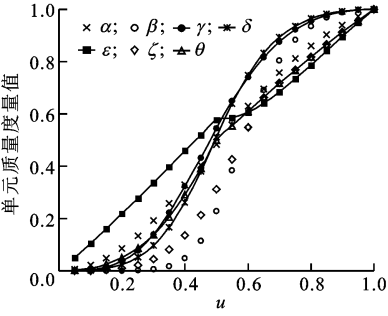


图 6 方案 4 中单元质量度量值随 u 的变化情况

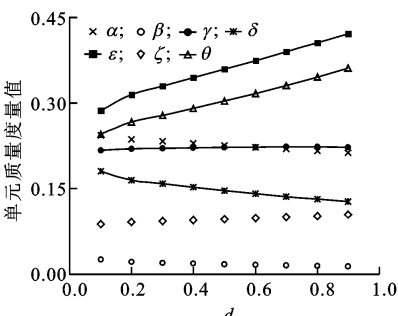


图 7 方案 5 中单元质量度量值随 d 的变化情况

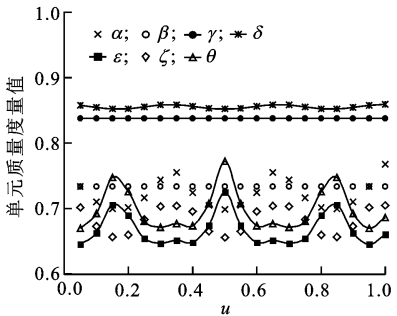


图 8 方案 6 中单元质量度量值随 u 的变化情况

由图 8 不难发现, α 、 ϵ 、 ζ 、 θ 为周期性变化, 而 β 、 γ 、 δ 均为常数. 事实上, 方案 6 中四面体的体积 $V=2^{1/2}/12, \sum_{i=1}^6 L_i^2=6.75$ 均为常数, 因而 u 的变化并不能改变 β 、 γ 、 δ . 由此说明, 方案 6 对形状变化的评判并不是等价的, 即 α 、 ϵ 、 ζ 、 θ 能够反映由顶点移动引起的单元质量的变化, 而 β 、 γ 、 δ 却无法反映出质量的变化.

网格优化过程中需要多次、反复地调用单元质量衡量准则, 而在对较差的网格进行优化的过程中, 调用单元衡量准则的次数可能是单元总数的几倍以上, 因此基于优化效率方面的考虑, 需要研究执行衡量准则的时间. 表 3 为不同网格数下各种衡量准则判别单元质量所需时间的对比.

从表 3 可以看出, 对于相同单元数的质量判别, γ 准则所需时间最短, θ 准则所需时间最长, 但二者相差不大. 因此, 在网格优化过程中, 不同衡量准则在判别四面体单元质量时所用时间的差别对优化效率的影响完全可以忽略.

表 3 各种单元衡量准则判断所需时间对比

单元数	时间/s						
	α	β	γ	δ	ϵ	ζ	θ
1 758 562	14.90	16.36	12.35	13.67	12.75	15.54	16.75
1 105 727	9.43	10.87	8.07	9.06	9.29	10.06	10.98
782 704	3.93	4.62	3.11	3.20	3.21	4.04	5.01

综合以上分析, α 准则在对劣质单元、单元形状变化的评判以及在判别网格质量所用时间等方面都显示出了较好的优势, 因此它是一种较优的单元质量衡量准则.

2 网格优化

2.1 网格优化目标函数

通过对四面体网格单元衡量准则及最优算法的研究, 将单元衡量准则经过变换后引出了错误函数的概念, 即将单元扭曲度作为错误来对待, 扭曲度越大, 错误值越大, 错误函数的最大值为无穷, 最小值为 0. 这样, 四面体网格中所有单元错误函数之和可以作为基于优化光顺的目标函数, 再通过对目标函数最小值的求解, 也就是对最小错误值的求解, 便可达到对四面体网格优化的目的.

将 α 准则取倒数, 便引出错函数

$$E_1(T) = \left(\sum_{i=1}^4 S_i\right) \max_{i=1,\dots,6} L_i/V \tag{1}$$

网格单元为正四面体时, 错误函数的最小值为 1, 随着单元的变形, 函数值趋近于无穷. 如果单元反向变形或体积值为负, 错误函数值则为无穷. 定义网格整体的错误函数为 $E(\Gamma)$, 也就是所有单元错误之和为

$$E(\Gamma) = \sum_{T \in \Gamma} E_1(T) \tag{2}$$

$E(\Gamma)$ 即为基于优化算法的目标函数.

现有的网格优化算法大都以提高最差单元质量和局部质量最高为目标, 并未考虑对数值计算精度有显著影响的边界网格的优化, 因此需建立能够控制边界网格质量且能保护边界完整性的目标函数. 这种目标函数如下

$$E(\Gamma) = (1 - C) \sum_{T \in \Gamma_1} E_1(T) + C \sum_{T \in \Gamma_2} E_1(T) \tag{3}$$

式中: Γ 表示三维实体所有网格单元; Γ_1 表示三维实体内部网格单元; Γ_2 表示三维实体的边界网格单元; T 表示某一四面体单元; C 为优化权重系数, 表

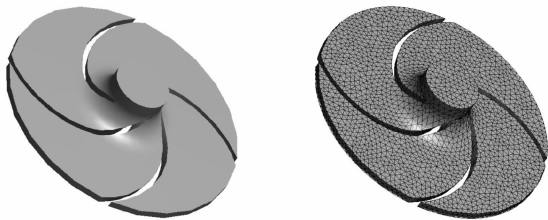
示边界网格质量占整体网格质量的权重, $0.5 \leq C < 1$, 当 $C=0.5$ 时表示边界网格和内部网格采用同样的处理方式. 从式(3)可以看出, 该目标函数不仅考虑了网格内部单元的质量, 而且重点考虑了边界单元的质量.

2.2 不同权重系数下优化结果对比

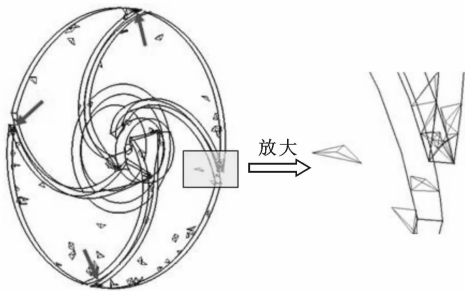
优化程序运行于 Windows XP 系统, 硬件平台为主频 2 Hz、内存 1 GB. 以某离心泵叶轮为例进行了优化, 叶轮模型及网格如图 9a 所示, 优化前初始网格中劣质单元分布如图 9b 所示 (共有 103 964 个节点, 518 287 个四面体单元). 从图 9b 可以看出, 在叶轮出口的边界 (实线箭头所示), 存在大量的劣质单元. 采用本文算法进行优化后 (见图 9c、9d), 内部和边界的劣质单元数量明显减少, 随着 C 的增加, 边界的单元质量得到了进一步提高 (实线箭头所示).

优化前后网格质量以及在两种不同优化权重系数下网格质量的对比如图 9e 所示. 从图 9e 可看出, 优化前存在单元质量度量值趋近于 0 的劣质单元 (存在 57 个单元质量度量值小于 0.1 的劣质单元), 而优化后这些单元全部消失, 网格单元质量曲线右移, 网格单元数量在高质量区域内的比例 (0.7~1.0) 有所提高, 即网格整体质量得到了提高. 从图 9e 还可以看出, 随着 C 的增加 (C 从 0.5 变化为 0.7), 网格质量曲线随之右移, 因此 C 的增加也能够提高网格的整体质量.

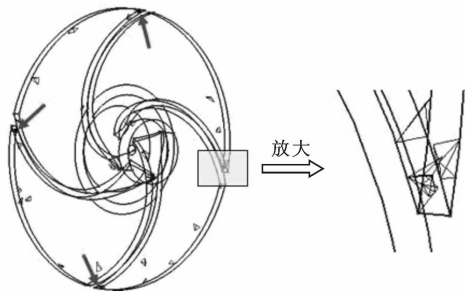
本文叶轮采用不同 C 进行优化后得到的平均



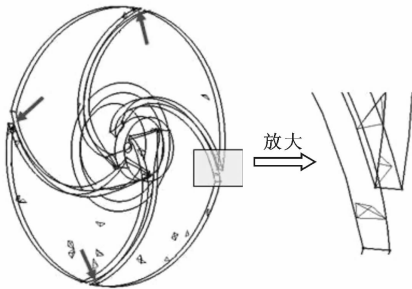
(a) 叶轮模型及其网格示意



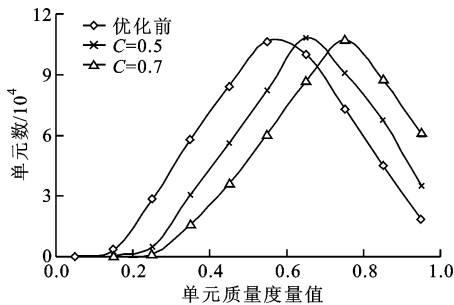
(b) 优化前叶轮劣质单元分布



(c) 优化后叶轮劣质单元分布 ($C=0.5$)



(d) 优化后叶轮劣质单元分布 ($C=0.7$)



(e) 优化前后网格质量对比

图 9b~9d 中黑点为 α 小于 0.15 的劣质单元
图 9 离心泵叶轮模型及优化前后网格质量对比

网格单元质量对比如图 10 所示. 由图 10 可知, 随着 C 的逐渐增加, 整体网格和边界网格的平均质量有所提高, 但内部网格的平均质量略有下降.

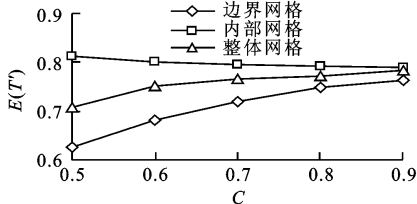


图 10 不同优化权重系数下平均网格质量对比

C 的增加对优化时间的影响如图 11 所示. 由图 11 可知, C 的增加使得边界网格和整体网格的优化时间均有所增加, 并且增加幅度较大. 这是由于, 在

对边界网格进行优化以确定网格节点最佳位置的过程中,不但要求解目标函数的最优解,还要进行边界完整性判断,所以边界优化耗费了更长的时间。

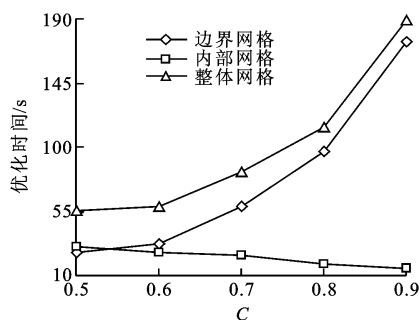


图 11 不同优化权重系数下优化时间对比

综上所述,随着 C 的增加,整体网格和边界网格的平均质量有所提高,但优化所花费的时间大幅增加。因此,从优化效果和效率等方面考虑,本文推荐 C 取 0.7~0.8 较为适宜。

3 结 论

网格单元质量衡量准则是获得优化目标函数的前提和基础,本文对 7 种比较常用的四面体单元质量衡量准则进行了数值试验,结果表明:采用 ϵ 和 θ 衡量准则会将导致计算发散的劣质单元认为是质量较高的单元;采用 β 、 γ 、 δ 衡量准则,无法对单元形状的变化做出正确的评判;各衡量准则之间存在不等价性;选取不同的衡量准则来评判四面体的单元质量,其所耗费的时间相差不大。

在数值试验的基础之上,选用一种最优的质量衡量准则 α 推导出错误函数,错误函数可以作为基于优化光顺的目标函数,该函数不仅包含了考虑边界网格和内部网格的质量函数项,而且还着重考虑了边界网格的质量,即在函数项前添加了权重系数。通过试验验证表明:本文算法可以有效消除离心泵四面体网格中的劣质单元,提高网格的整体质量。随着 C 的增加,边界网格的平均质量得到了提高。因此,本文算法可以很好地应用于离心泵的网格优化之中。

参考文献:

[1] 李想,顾春伟. 某离心叶轮的 CFD 分析和结果确认 [J]. 工程热物理学报, 2008, 29(8): 1291-1296.
LI Xiang, GU Chunwei. CFD analysis and result validation of a certain centrifugal compressor impeller [J]. Journal of Engineering Thermophysics, 2008, 29(8):

1291-1296.

[2] 刘重阳,于芳,徐让书. CFD 计算网格误差分析的一个算例 [J]. 沈阳航空工业学院学报, 2006, 23(4): 21-24.
LIU Chongyang, YU Fang, XU Rangshu. A grid error analysis example in CFD [J]. Journal of Shenyang Institute of Aeronautical Engineering, 2006, 23(4): 21-24.

[3] 张涵信. 关于 CFD 计算结果的不确定度问题 [J]. 空气动力学学报, 2008, 26(1): 47-49.
ZHANG Hanxin. On the uncertainty about CFD results [J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2008, 26(1): 47-49.

[4] XU K, CHENG Z Q. Quality encoding for tetrahedral mesh optimization [J]. Computers & Graphics, 2009, 33(3): 250-261.

[5] TOURNOIS J, WORMSER C. Interleaving Delaunay refinement and optimization for practical isotropic tetrahedron mesh generation [J]. ACM Transactions on Graphics, 2010, 28(3): 1557-1571.

[6] AHN H T, BRANETS L. Moving boundary simulations with dynamic mesh smoothing [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2010, 64(8): 887-907.

[7] 武利龙,陈斌. 基于气泡堆积的非结构化网格生成技术 [J]. 西安交通大学学报, 2009, 43(1): 29-33.
WU Lilong, CHEN Bin. Bubble packing method based unstructured grid generation [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2009, 43(1): 29-33.

[8] MAO Z H, MA L Z. A modified Laplacian smoothing approach with mesh saliency [J]. Lecture Notes in Computer Science, 2006, 47(2): 105-113.

[9] 刘厚林,路明臻,董亮,等. 基于错误函数的四面体网格优化方法 [J]. 江苏大学学报: 自然科学版, 2010, 32(1): 60-64.
LIU Houlin, LU Mingzhen, DONG Liang. Optimization of tetrahedral mesh based on error function [J]. Journal of Jiangsu University: Natural Science Edition, 2010, 32(1): 60-64.

[10] HETMANIUK U, KNUPP P. A mesh optimization algorithm to decrease the maximum interpolation error of linear triangular finite elements [J]. Engineering with Computers, 2010, 27(1): 3-15.

[11] LIU A, JOE B. Relationship between tetrahedron shape measures [J]. Numerical Mathematics, 1994, 34(2): 268-287.

[12] LO S H. Optimization of tetrahedron meshes based on element shape measures [J]. Computers & Structures, 1997, 63(5): 951-961.

(编辑 苗凌)